Etudes de Fonctions

EXERCICE N°1 :

❶ Soit φ définie sur IR par $\varphi(x) = 1 +(x - 1)e^{-x}$.

a- Dresser le tableau de variation de φ.

b- Calculer $\varphi(0)$, en déduire le signe de $\varphi(x)$ $\forall$ x $\in$ IR.

❷ Soit h la fonction définie sur IR par $h(x) = x(1 + e^{-x})$ et (ζ_h) sa courbe.

a- Dresser le tableau de variation de h.

b- Montrer que D : y = x est une asymptote à (ζ_h) au voisinage de $+\infty$ puis tracer (ζ_h).

❸ Soit la suite u définie sur IN par : $u_0 = ½$ et $u_{n+1} = h(u_n)$

a- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN, $u_n \geq 0$.

b- Montrer que u est décroissante.

c- En déduire que u est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE N°2 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (x + 1)(e^{-2x} + 1)$

On note(ζ_f) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

❶ Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

❷ Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = e^{-2x}(e^{2x} - 2x - 1)$

On donne ci-dessous le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		+	ϕ	+	
f	↗				

❸ a- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, interpréter graphiquement ce résultat.

b- Montrer que la droite Δ : y = x + 1 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$.

c- Etudier la position de (ζ_f) par rapport à Δ .

d- Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on précisera.

❹ Tracer Δ et (ζ_f).

❺ a- A l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $\int_0^1 xe^{-2x}dx = \dfrac{1-3e^{-2}}{4}$.

b- Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (ζ_f), la droite Δ et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1.

EXERCICE N°3 :

On donne ci-après la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

On admet que (ζ_f) admet :

- Une tangente horizontale au point d'abscisse e .
- Une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction (xx').

A/

1) Déterminer : f(1) ; f'(e) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle]0,e]. Montrer que g réalise une bijection sur un intervalle J que l'on précisera.

B/

On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$, $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1) a- Vérifier que : $I_1 = 1$.

b- Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n\in IN^*$: $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

c- En déduire les valeurs de I_2 , I_3 et I_4 .

2) a- Montrer que pour tout $x\in[1,e]$ et pour tout $n\in IN^*$, $(\ln x)^{n+1} - (\ln x)^n \leq 0$.

b- En déduire que pour tout $n\in IN^*$, la suite I_n est décroissante.

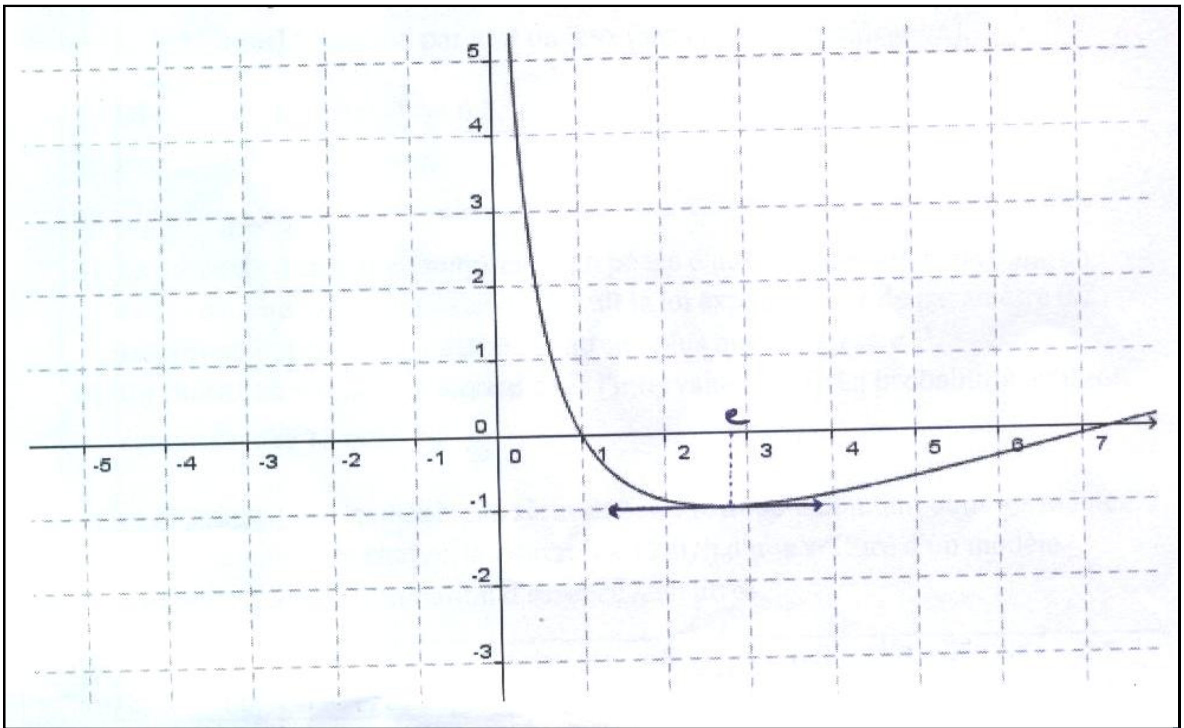
3) a- Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $0 \leq I_n \leq e$.

b- En déduire que I_n est convergente.

4) On admet que $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x$.

a- Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (ζ_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : x = 1 et x = e.

b- Par une rotation de (ζ_f) $(1 \leq x \leq e)$ autour de l'axe des abscisses on obtient un solide. Donner son volume.



EXERCICE N°4 :

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité = 2cm).

On considère la fonction f, définie sur]0,+∞[par : f(x) = $(x-\frac{1}{x})(\ln x-2)$.

1) Déterminer les limites de f en +∞ et en 0.

2) Soit g la fonction définie sur]0,+∞[par g(x) = lnx + x – 3.

a- Etudier les variation s de g.

b- Montrer que l'équation g(x) = 0admet une solution unique α et que 2.20 <α <2.21

c- Etudier le signe de g sur]0,+∞[.

3) a- Montrer que f est dérivable sur]0,+∞[et que f '(x) = $\frac{g(x)}{x^2}$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Montrer que $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

d- En déduire que : -0.65 < f(α) < -0.66

4) a- Etudier le signe de f(x).

b- Tracer (ζ_f).

5) Soit h la restriction de f sur]0,α].

a- Montrer que h est une bijection de]0,α] dans un intervalle que l'on déterminera.

b- Tracer la courbe de h dans le même repère.

6) a- Montrer que f(x) = $\ln x-\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2$.

b- Montrer que $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=2$

c- Calculer en cm^2 l'aire du domaine limitée par (ζ_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = e^2.

EXERCICE N°5 :

Soit f définie sur IR par f(x) = $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

1) Etudier la parité de f.

2) Déterminer les asymptotes de f.

3) a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Tracer (ζ_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c- Soit λ >1, déterminer l'aire de la partie du plan limité par (ζ_f) , la droite x = λ et les axes du repère. Calculer A(λ).